CONCOURS COMMUN MINES.PONTS 1978

OPTION P' - 2EME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(DUREE : 4 HEURES)

L'énoncé de cette épreuve, spécifique aux candidats de l'option P', comporte 3 pages.

Il est demandé expressément aux candidats de donner des démonstrations précises et rigoureuses. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur.

Dans tout le problème, A désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs,

$\mathcal{V}$ désigne l'espace vectoriel des applications de A dans $\mathbb{R}$.

Les parties I, II sont largement indépendantes.

PARTIE I

Pour n entier positif ou nul, on définit les éléments u_n, v_n, w_n de $\mathcal{V}$ respectivement par : $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!\,(x+n)}$; $v_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!\,(x+n)^2}$; $w_n(x) = \frac{2.(-1)^n}{n!\,(x+n)^3}$

(On rappelle l'égalité : 0! = 1) .

1°) - Montrer que, pour tout x dans A, les séries de termes généraux respectifs : $u_n(x)$, $v_n(x)$, $w_n(x)$ convergent. On définit les éléments U, V, W de $\mathcal{V}$ par :

$$U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \quad ; \quad V(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) \quad ; \quad W(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n(x) \ .$$

.../...

Montrer que U et W sont à valeurs strictement positives ; que V est à valeurs strictement négatives.

2°) - Montrer : $U(1) = \frac{e-1}{e}$, et : $(\forall x \in A)\ (x\,U(x) - U(x+1) = \frac{1}{e})$.

3°) - Les réels x_0 et h vérifiant : $h \neq 0$; $x_0 \in A$; $(x_0 + h) \in A$, montrer l'égalité :

$$\frac{1}{h}\ [\ U(x_0+h) - U(x_0)\ ]\ -\ V(x_0) = h.\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\ (x_0+n)^2\ (x_0+n+h)}\ .$$

En déduire que U est dérivable sur A, et que sa fonction dérivée U' est égale à V.

Montrer <u>de façon analogue</u> que V est dérivable sur A, avec V' = W .

4°) - Montrer : $\lim_{x \to 0} [x\,U(x)] = 1$, et : $\lim_{x \to 0} U(x) = +\infty$.

5°) - Montrer : $\lim_{x \to +\infty} U(x) = 0$. Déterminer le développement limité de U à l'ordre 3 au voisinage de $+\infty$, c'est-à-dire les réels a, b, c tels que :

$$\lim_{x \to +\infty} x^3\ [\ U(x) - \frac{a}{x} - \frac{b}{x^2} - \frac{c}{x^3}\ ]\ = 0\ .$$

6°) - Illustrer les résultats précédents par une représentation graphique de la fonction U .

7°) - On se propose de démontrer : $(\forall x \in A)\ (U(x) = \int_0^1 e^{-t}\ t^{x-1}\ dt)$.

(a) Montrer que, pour tout x dans A, l'intégrale $I(x) = \int_0^1 e^{-t}\ t^{x-1}\ dt$ converge, et vérifier : $(\forall x \in A)\ (x\,I(x) - I(x+1) = \frac{1}{e})$.

(b) Soient x un réel > 1 , et N un entier positif. Montrer l'inégalité :

$$|\ I(x) - \sum_{n=0}^{n=N} u_n(x)\ |\ \leqslant \int_0^1 \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \right) dt.$$

(c) Conclure.

.../...

PARTIE II

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications f de A dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivables, qui vérifient : (2) $(\forall\, x \in A)\ (x\, f(x) - f(x+1) = \frac{1}{e})$.

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications g de A dans $\mathbb{R}$, dérivables, qui vérifient :

(3) $(\forall\, x \in A)\ (\, g(x+1) = g(x) + \frac{1}{x}\,)$.

On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des applications h de A dans $\mathbb{R}$, dérivables, qui vérifient :

(4) $(\forall\, x \in A)\ (\, h(x+1) = h(x)\,)$

$\mathcal{G}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{D}$.

1°) - Que dire d'une fonction croissante élément de $\mathcal{G}$?

2°) - Si x appartient à A, si n est un entier positif ou nul, on pose :

$$\lambda_n(x) = \frac{x-1}{(n+1)\ (n+x)}$$

(a) Montrer que, pour tout x dans A, la série de terme général $\lambda_n(x)$ converge.

On note $\lambda(x)$ sa somme, et l'on définit ainsi une application λ de A dans $\mathbb{R}$.

Montrer que λ est strictement croissante, et que : $\lim_{x \to 0} \lambda(x) = -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} \lambda(x) = +\infty$.

(b) Montrer que λ est dérivable, et que sa fonction dérivée λ' vérifie pour tout x dans A :

$$\lambda'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2}$$. Montrer $\lim_{x \to +\infty} \lambda'(x) = 0$.

(c) Montrer que λ appartient à $\mathcal{F}$.

3°) - Montrer que la série de terme général : $\mathrm{Log}\,(1 + \frac{1}{n+1}) - \frac{1}{n+1}$ converge, et que sa somme, notée Γ , est un réel strictement négatif.

4°) - Si h est un élément de $\mathcal{G}$ vérifiant : (5) $\int_1^2 h(t)\,dt = \Gamma$, on note E_h l'application : $x \longmapsto e^{\Lambda_h(x)}$ de A dans $\mathbb{R}$, où Λ_h est la primitive de $\lambda + h$ sur A, nulle au point 1 . Montrer que E_h vérifie : (6) $(\forall\, x \in A)\ (x\, E_h(x) = E_h(x+1))$.

5°) - Montrer qu'il existe , et de façon unique, un élément h de $\mathcal{G}$, vérifiant (5), tel que E_h satisfasse à : (7) $(\forall\, x \in A)\ (\, E_h(x) \cdot E''_h(x) \geq [E'_h(x)]^2\,)$.

6°) - Montrer avec ce qui précède que l'ensemble $\mathcal{E}$ est infini.

°°°°°
°°°°°

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail